1. **Условие задания**

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в цилиндрической системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Коэффициент разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

1. **Постановка задачи**

Эллиптическая краевая задача для функции u определяется дифференциальным уравнением

,

заданным в некоторой области Ω с границей , и краевыми условиями

- значение искомой функции на границе (первое краевое условие)

- значение на производной функции по направлению внешней нормали к поверхности (второе краевое условие)

(третье краевое условие)

Дифференциальное уравнение для двумерной эллиптической краевой задачи в цилиндрической системе координат может быть записано в виде:

1. **Теоретическая часть**

*Вариационная постановка*

Уравнение можно также записать:

Потребуем, чтобы невязка дифференциального уравнения была ортогональна некоторому пространству функций , которое мы будем называть пространством пробных функций, т. е.

Преобразуем слагаемое с использованием формул Грина:

Где границы, на которых заданы соответствующие краевые условия.

Интегралы по границам можно преобразовать, воспользовавшись краевыми условиями:

Поскольку на границе краевыми условиями не определяется значение , слагаемое следует исключить из уравнения, потребовав, чтобы пространство пробный функций содержало только функции, которые принимали бы нулевые значения на границе.

В качестве мы можем выбрать .

Таким образом, получаем вариационное уравнение вида:

Получим аппроксимацию уравнения Галёркина на конечномерных подпространствах , аппроксимирующих исходные пространства

Поскольку любая функция ∈ может быть представлена в виде линейной комбинации

вариационное уравнение эквивалентно следующей системе уравнений:

Поскольку , оно может быть представлено в виде линейной комбинации базисных функций пространства :

подставляя в прошлое уравнение, получим СЛАУ для компонент вектора весов q с индексами :

Поскольку исходная задача рассматривается в цилиндрической системе координат, то

и, соответственно:

Отсюда получаем:

*Конечноэлементная дискретизация и переход к локальным матрицам*

Рассмотрим треугольник с вершинами , и .

Введем на нём три линейные функции

,

такие, что функция равна единице в вершине и нулю в двух остальных вершинах(аналогично для функций ).

(Добавить сюда ещё со стр 275 соотношения)

Отсюда справедливо следующее:

=

И отсюда следует, что все коэффициенты функций являются компонентами матрицы **а**, обратной к определяемой только координатами вершин треугольника матрице

- матрица координат вершин треугольника

Через матрицу может быть вычислена площадь треугольника с вершинами , и

где – определитель матрицы . Значения и компонент , являющихся коэффициентами функций легко вычисляются из определения матрицы :

Функции , удобны тем, что для них существуют очень простые формулы, позволяющие вычислять интегралы от произведенийв произвольных степенях по треугольнику

На каждом элементе треугольной сетки определим три локальные базисные функции

Чтобы получить выражения для локальных матриц жёсткости и массы каждого конечного элемента , перейдём к решению локальной задачи на каждом конечном элементе. Полученное уравнение для области представим в виде суммы интегралов по областям без учёта краевых условий. Тогда на каждом конечном элементе будем решать локальную задачу построения матриц жёсткости и массы и вектора правой части.

Локальная матрица будет представлять собой сумму матриц жёсткости и массы и будет иметь размерность 3x3 (по числу узлов на конечном элементе).

Получим выражение для локальной матрицы жесткости .

Получим выражение для локальной матрицы масс .

Вычислим компоненты матрицы масс:

Получим выражение для вектора правой части

представим в виде , где значения в вершинах треугольника. Получим:

Таким образом: